Université Claude Bernard – Lyon 1 | Techniques Mathématiques de Base
Année universitaire 2014 – 2015 | Licence 1 (PCSI)

Feuille 7 : Géométrie analytique

Exercice 1. Calculer les normes des vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

(a) $\vec{a} = (4, -3)$ (b) $\vec{b} = (3, 12, -4)$ (c) $\vec{c} = (-7, 4, -4)$

Exercice 2. Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants et dire s'ils sont orthogonaux ou non :

(a) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{a}_2 = (0, 0, 1)$,
(b) $\vec{b}_1 = (3, 8, -5)$ et $\vec{b}_2 = (4, -2, -5)$,
(c) $\vec{c}_1 = (2, 4, -7)$ et $\vec{c}_2 = (8, 3, 4)$.

Exercice 3. Calculer le produit vectoriel des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants :

(a) $\vec{a} = (2, -3, 5)$ et $\vec{b} = (3, 5, -1)$,
(b) $\vec{a} = (-2, -7, 21)$ et $\vec{b} = (1, 4, -12)$,
(c) $\vec{a} = (3, -5, 4)$ et $\vec{b} = (-6, 10, -8)$.

Exercice 4. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les deux points $A = (1, 3)$ et $B = (-1, 0)$. Déterminer :

(a) l'équation cartésienne de la droite Δ passant par A et B,
(b) l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les points $A = (-4, 2, -3)$, $B = (2, 5, 8)$ et $C = (-3, 7, -5)$.

(a) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
(b) Écrire une équation paramétrique du plan passant par A, B et C.
(c) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
(d) Écrire l'équation cartésienne du plan passant par A, B et C.

Exercice 6. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le point $A = (1, 2, 3)$. Écrire l'équation du plan :

(a) passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$,
(b) passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$,
(c) passant par A, $B = (3, -2, 1)$ et $C = (5, 0, -4)$.

Exercice 7. On considère une droite dans $\mathbb{R}^3$ donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + 5y + 6z + 9 = 0, \\ 3x + 4y + 5z + 7 = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'équation paramétrique de cette droite.

Exercice 8. Déterminer :

(a) les coordonnées polaires des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ suivants : $\begin{cases} \vec{x} = (-1, 1) \\ \vec{y} = (2\sqrt{3}, -2) \end{cases}$,

(b) les coordonnées sphériques des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants : $\begin{cases} \vec{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}) \\ \vec{y} = (2, -2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}) \end{cases}$,

(c) les coordonnées cylindriques des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants : $\begin{cases} \vec{x} = (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3}, 17) \\ \vec{y} = (-3, -3\sqrt{3}, -4) \end{cases}$.

Exercice 9. Déterminer les coordonnées cartésiennes des vecteurs de coordonnées sphériques suivantes :

(a) $(\rho, \theta, \varphi) = \left(5, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$

(b) $(\rho, \theta, \varphi) = \left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

Exercice 10. (*Produit scalaire, déterminant dans* $\mathbb{R}^2$)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. En utilisant l'écriture de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en coordonnées polaires, montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\|v\| \cos\left[(\vec{u}, \vec{v})\right],$$

où $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. On définit le déterminant comme suit : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|u\|\|v\| \sin\left[(\vec{u}, \vec{v})\right],$$

et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ sinon.

   (a) Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

   (b) À quelle condition a-t-on $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$?

   (c) Montrer que $|\det(\vec{u}, \vec{v})|$ est l'aire du parallèlogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 11. (*Produit mixte, déterminant dans* $\mathbb{R}^3$)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$.

On définit le déterminant (ou produit mixte) de trois vecteurs comme suit :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w}.$$

1. Exprimer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en fonction des coordonnées des trois vecteurs.
2. À quelle condition géométrique a-t-on $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$?
3. Calculer $\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 12. (*Matrices* 2×2)

On apprend ici à faire un peu de calcul avec les matrices. Prenons des matrices carrées de dimension 2, c'est-à-dire des "tableaux" de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On peut définir le produit d'une telle matrice A avec un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ selon la formule suivante (le résultat est un vecteur de $\mathbb{R}^2$) :

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

On définit le déterminant de A comme le déterminant de ses vecteurs colonnes

$$\det A = \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les produits suivants

   $$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer le déterminant de A.
2. *Matrices et systèmes linéaires.* On considère le système suivant

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{array} \right. \tag{1}$$

   Réécrire le système (1) sous la forme $A\vec{u} = \vec{b}$. Résoudre le système, puis vérifier que la solution (x, y) peut être calculée selon les formules

   $$x = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. (*Matrices* 3×3)

On fait maintenant des calculs avec des matrices de taille 3×3. Prenons des matrices carrées de dimension 3, c'est-à-dire des "tableaux" de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On peut définir le produit d'une telle matrice A avec un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ selon la formule suivante (le résultat est un vecteur de $\mathbb{R}^3$) :

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.$$

On définit le déterminant de A comme le déterminant de ses vecteurs colonnes

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer les produits suivants

   $$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer le déterminant de A.

2. *Matrices et systèmes linéaires.* On considère le système suivant

   $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \end{array} \right. \tag{2}$$

   Réécrire le système (2) sous la forme $A\vec{u} = \vec{b}$. Résoudre le système, puis vérifier que la solution (x, y, z) peut être calculée selon les formules

   $$x = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$